Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
Fundamentos de Álgebra

Tarea 3. Vectores

Vídeo 1: Vectores: componentes, norma y dirección - YouTube

Vídeo 2: Operaciones con Vectores: multiplicación por un escalar y suma de vectores (regla del paralelogramo) - YouTube

Vídeo 3: Vector unitario - YouTube

1. Dados los siguientes vectores, obtenga:

1.1 la magnitud y dirección
1.2 grafique el vector
1.3 el vector unitario en dirección de ***v***

a) $\vec{v} = \langle -4, 4 \rangle$ b) $\vec{v} = 2i + 3j$

c) $\vec{v} = \langle \sqrt{3}, -2 \rangle$ d) $\vec{v} = -3i - 4j$

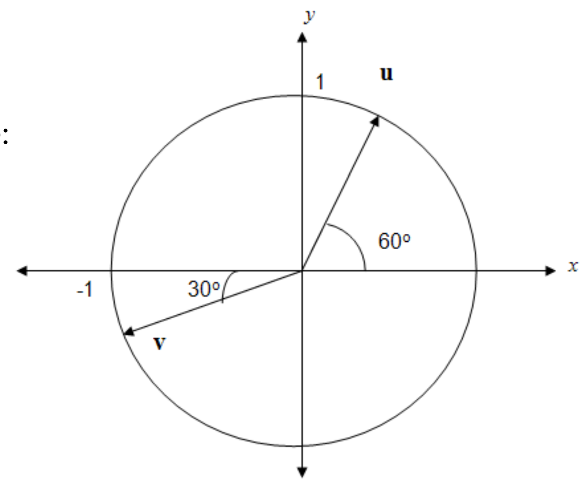
2. Encontrar las componentes de un vector **v** que tenga la magnitud y dirección dadas.

1) $|\vec{v}| = 3; \theta = \pi/6$ 3) $|\vec{v}| = 1; \theta = 7\pi/4$

2) $|\vec{v}| = 4; \theta = \pi$ 4) $|\vec{v}| = 2; \theta = \pi/2$

Soluciones:
1) ***v*** = (2.5981, 1.5)
2) ***v*** = (–4, 0)
3) ***v*** = (–0.7071, 0.7071)
4) ***v*** = (0, 2)

3. Dados los vectores **u** y **v** representados en la gráfica, calcule:
a) **u**+**v**, b) **u**–**v**, c) 2**u**+3**v**.



Soluciones:
a) (–0.3660, 0.3660)
b) (1.3660, 1.3660)
c) (–1.598, 0.232)

4. Grafique el vector y calcule sus ángulos directores $\boldsymbol{v} = (1, 2, 3)$

Soluciones: $\alpha = 74.49°$, $\beta = 57.68°$, $\gamma = 36.69°$

Vídeo 4: [Operaciones con vectores (Ejemplo) - YouTube]

Vídeo 5: [Producto punto (producto escalar) y Producto cruz (producto vectorial) - YouTube]

5. Sea **w** el vector con dirección $\pi/4$ y magnitud 2, y **v** el vector con dirección $\pi/3$ y magnitud 3. Calcule:

		Respuesta
a)	$\lVert w \rVert$	2
b)	$\lVert v \rVert$	3
c)	$w \cdot v$	$\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{6}}{2}$
d)	vector unitario en la direccion de w	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
e)	vector unitario en la direccion de v	$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
f)	*v + w*	(2.9142, 4.0122)
g)	*3v – 2w*	(1.67, 4.96)

6. Determine en cada problema las variables *a*, *b* y *c* para que se cumplan las ecuaciones:

		Respuesta		
		a	b	c
a)	$(8a, 2b, 13c) = (52, 12, 11)$	$\frac{13}{2}$	6	$\frac{11}{13}$
b)	$(-4a, b, -3c) = (5, -6, 1)$	$-\frac{5}{4}$	-6	$-\frac{1}{3}$
c)	$(\frac{1}{5}a, -\frac{2}{3}b, \frac{4}{7}c) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{7}, -\frac{3}{4})$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{3}{7}$	$-\frac{21}{16}$

7. Encuentre números *a* y *b* tales $\mathbf{u} = a\mathbf{v} + b\mathbf{w}$

				Respuesta	
a)	u= $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$	v= $2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}$	w= $\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j}$	a= $-\frac{4}{13}$	b= $\frac{5}{13}$
b)	u= $\boldsymbol{i}$	v= $-2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$	w= $5\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j}$	a= $\frac{5}{34}$	b= $\frac{1}{7}$

8. Dados los vectores $u = (2, 3, -1)$; $v = (1, 2, -2)$; $w = (3, -5, 4)$, calcular:

a) $2u + 4v - 5w$ (Sol. –7, 39, –30)
b) $3u - 2v + w$ (Sol. 7, 0, 5)
c) Un vector unitario en la dirección de $3\boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{w}$ (Sol. 0, 0.86542, –0.50103)
d) Un vector con longitud igual a 3 en la dirección opuesta a $2\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$ (Sol. 0.2482, –2.2345, 1.9862)
e) $\| 3(u+w) - 2(v-w) \|$ $\left(Sol. \sqrt{1202}\right)$
f) $u \times w$
g) $u \bullet v$
h) El triple producto escalar $u \bullet (v \times w)$
i) El triple producto vectorial $u \times (v \times w)$ (Sol. 17, 19, 11)
j) El triple producto vectorial $(u \times v) \times w$ (Sol. 17, 19, 11)
k) Demostrar que $u \times v = -(v \times u)$
l) De mostrar que $u \times u = 0$
m) Demostrar que $u \times (v + w) = (u \times v) + (u \times w)$

Vídeo 6: [Cómo calcular el ángulo entre dos vectores - YouTube]

Vídeo 7: [Área del paralelogramo y volumen del paralelepípedo - YouTube]

9. Demuestre que los vectores u y v son ortogonales.

a) $u = \langle 4, -1 \rangle$; $v = \langle 2, 8 \rangle$
b) $u = \langle 3, 6 \rangle$; $v = \langle 4, -2 \rangle$
c) $u = -8i - 3j + 10k$; $v = 2i - 2j + k$
d) $u = i - 2j + 4k$; $v = 2i + 5j + 2k$

10. Demuestre que los vectores son paralelos y determine si tienen la misma dirección o si esta es opuesta.

1) $a = 3\hat{\imath} - 5\hat{\jmath}$; $b = -\frac{12}{7}\hat{\imath} + \frac{20}{7}\hat{\jmath}$

2) $a = -\frac{5}{2}\hat{\imath} + 6\hat{\jmath}$; $b = -10\hat{\imath} + 24\hat{\jmath}$

3) $a = \langle 6, 18 \rangle$; $b = \langle -4, -12 \rangle$

11. Calcule c (si existe) para que **u** y **w** sean paralelos (utilice el producto cruz).

			Respuesta
a)	$\vec{\mathbf{u}} = 5i + 3j$	$\vec{\mathbf{w}} = 2i + cj$	$\mathbf{c} = \frac{6}{5}$
b)	$\vec{\mathbf{u}} = 2i - cj$	$\vec{\mathbf{w}} = i + 4j$	$\mathbf{c} = -8$
c)	$\vec{\mathbf{u}} = -ci + 5j$	$\vec{\mathbf{w}} = 8i - 2j$	$\mathbf{c} = 20$
d)	$\vec{\mathbf{u}} = -\frac{1}{2}i - \frac{1}{5}j$	$\vec{\mathbf{w}} = -ci - 2j$	$\mathbf{c} = 5$

12. Dados los siguientes vectores, calcule:

11.1 El producto vectorial
11.2 El ángulo entre los vectores
11.3 La proyección de ***u*** sobre ***v***
11.4 La proyección de ***v*** sobre ***u***

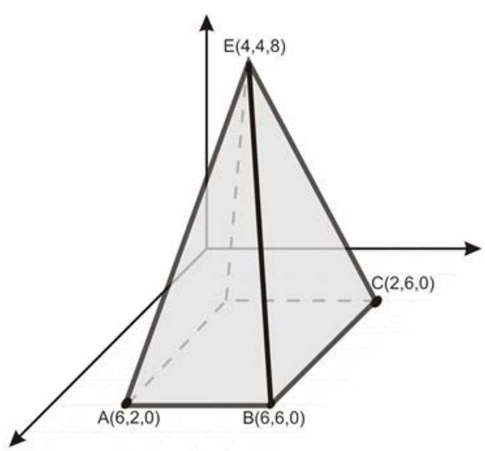
a)	$u = \langle -2,5 \rangle; \quad v = \langle 3,6 \rangle$
b)	$u = 4\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 3k; \quad v = -3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - 2k$
c)	$u = -2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}; \quad v = 7\hat{\imath} + 4k$
d)	$u = 2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + k; \quad v = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + k$
e)	$u = \hat{\imath} + 7\hat{\jmath} - 3k; \quad v = -\hat{\imath} - 7\hat{\jmath} + 3k$

Soluciones:

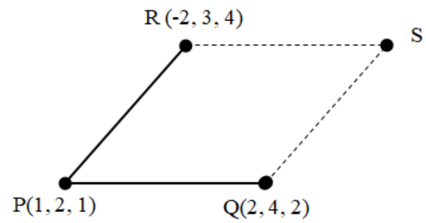
a) $-27k$, 48.37°, (8/5, 16/5), (–48/29, 120/29)
b) (–4, 1, 5), 162.04°, (60/17, –40/17, 40/17), (–40/13, -10/13, 30/13)
c) ($12i + 8j - 21k$), 118.79°, (28/13, –42/13, 0), (–98/65, 0, –56/65)
d) (–5, –1, 7), 109.1°, (–6/14, 9/14, –3/14), (–0.5, –1, –0.5)

13. Dada la figura, calcular:

a) El área del paralelogramo formado por los vértices A, B, C. (16 u^2)
b) El volumen de la figura. (42.66 u^3)
c) La proyección $\vec{AE}$ sobre $\vec{AB}$ (0, 2, 0)
d) El ángulo entre $\vec{BE}$ y $\vec{BC}$ (76.36°)



14. Dada la figura, calcule:



a) El área del paralelogramo (10.48 u^2)

b) La proyección $\vec{PR}$ sobre $\vec{PQ}$ (1/3, 2/3, 1/3)

c) La proyección $\vec{PQ}$ sobre $\vec{PR}$ (–6/19, 2/19, 6/19)

d) El ángulo entre los vectores $\vec{PR}$ y $\vec{PQ}$

Vídeo 8: Valores propios y vectores propios (Eigenvalores y Eigenvectores) - YouTube

15. Dadas las siguientes matrices, determine:

a) Los valores propios y vectores propios
b) Compruebe que $\mathbf{T^{-1}AT = D}$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Soluciones:

a) $\lambda = 4, \lambda = 2$
b) $\lambda = -1, \lambda = 2$