Tarea 1. Números Complejos

Ejercicios I. Después de ver los vídeos realice las siguientes operaciones.

Vídeo 1: Números Imaginarios - ¿De dónde salieron? - YouTube

Vídeo 2: Números Complejos - ¿Cómo graficarlos en el Plano Complejo? - YouTube

Vídeo 3: Complejo Conjugado - YouTube

Vídeo 4: Operaciones con Números Complejos (suma, resta, multiplicación, división) - YouTube

Vídeo 5: Potencias de la unidad imaginaria (i) - YouTube

	Ejercicio	Resultado		Ejercicio	Resultado
1)	i^8 i^{11} i^{42} i^{105}	*1* *-i* *-1* *i*	**2)**	$\frac{i}{1+i}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$
3)	$2i^3 - 3i^2 + 5i$		**4)**	$\frac{2-4i}{3+5i}$	$-\frac{7}{17}-\frac{11}{17}i$
5)	$3i^5 - i^4 + 7i^3 - 10i^2 - 9$	$-4i$	**6)**	$\frac{10-5i}{6+2i}$	$\frac{5}{4}-\frac{5}{4}i$
7)	$\frac{5}{i}+\frac{2}{i^3}-\frac{20}{i^{18}}$	$20-3i$	**8)**	$\frac{(3-i)(2+3i)}{1+i}$	$8-i$
9)	$2i^6+\left(\frac{2}{-i}\right)^3+5i^{-5}-12i$	$-2-25i$	**10)**	$\frac{(1+i)(1-2i)}{(2+i)(4-3i)}$	$\frac{7}{25}-\frac{1}{25}i$
11)	$(5-9i)+(2-4i)$	$7-13i$	**12)**	$\frac{(5-4i)-(3+7i)}{(4+2i)+(2-3i)}$	$\frac{23}{37}-\frac{64}{37}i$
13)	$3(4-i)-3(5+2i)$	$-3-9i$	**14)**	$\frac{(4+5i)+2i^3}{(2+i)^2}$	$\frac{24}{25}-\frac{7i}{25}$
15)	$i(5+7i)$	$-7+5i$	**16)**	$i(1-i)(2-i)(2+6i)$	$20i$
17)	$i(4-i)+4i(1+2i)$	$-7+8i$	**18)**	$(1+i)^2(1-i)^3$	$4-4i$
19)	$(2-3i)(4+i)$	$11-10i$	**20)**	$(2+3i)^2$	$-5+12i$

21)	$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}i\right)\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{3}i\right)$	$\frac{3}{4}+\frac{2}{3}i$	**22)**	$\left(1-\frac{1}{2}i\right)^3$	$\frac{1}{4}-\frac{11}{8}i$
23)	$3i+\frac{1}{2-i}$	$\frac{2}{5}+\frac{16}{5}i$	**24)**	$(2+3i)\left(\frac{2-i}{1+2i}\right)^2$	
25)	$(3+6i)+(4-i)(3+5i)+\frac{1}{2-i}$	$\frac{102}{5}+\frac{116}{5}i$	**26)**	$(-2+2i)^5$	$128-128i$

Ejercicios II. En los siguientes ejercicios determine Re(z) e Im(z)

1) $z=\left(\frac{i}{3-i}\right)\left(\frac{1}{2+3i}\right)$ {Sol. Re(z) = 7/130, Im(z) = 9/130)}

2) $z=\left(\frac{1}{(1+i)(1-2i)(1+3i)}\right)$ {Sol. Re(z) = 3/50, Im(z) = –4/50)}

Ejercicios III. Siendo z = x + yi, determine:

Vídeo 6: [Números Complejos, Ejemplo 3, Re(z), Im(z) - YouTube]

	Ejercicio	Resultado		Ejercicio	Resultado
1)	$Re\left\{\frac{1}{z}\right\}$	$\frac{x}{x^2+y^2}$	**2)**	$Im\{(1+i)z\}$	$x+y$
3)	$Re\{z^2\}$	x^2-y^2	**4)**	$\mathrm{Im}(z^3)$	$(3x^2y-y^3)$
5)	$Im\{2z+4\bar{z}-4i\}$	$-2y-4$	**6)**	$(\mathrm{Im}\ z)^3$	y^3
7)	$Im\{\bar{z}^2+z^2\}$	0	**8)**	$\mathrm{Im}\{(1+i)^8 z^2\}$	$32xy$
9)	$Re\{iz\}$	$-y$	**10)**	$Re\left\{\frac{1}{\bar{z}^2}\right\}$	$\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$
11)	$Im\{iz\}$	x	**12)**	$Re\left\{\frac{\bar{z}}{z}\right\}$	$\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

Ejercicios IV. Represente en forma polar y exponencial los siguientes números complejos

Vídeo 7: [Forma Polar - Trigonométrica y Exponencial de un número complejo - YouTube]

Vídeo 8: [Operaciones con números complejos en forma polar (suma, resta, multiplicación, división, potencias) - YouTube]

1. 2
2. -10
3. $-3i$
4. $6i$
5. $1+i$
6. $5-5i$
7. $-\sqrt{3}+i$
8. $-2-2\sqrt{3}i$
9. $\dfrac{3}{-1+i}$
10. $\dfrac{12}{\sqrt{3}+i}$

Soluciones de los ejercicios IV

1. $z=2\,(\cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi)$; $z=2\,(\cos 0 + i\operatorname{sen} 0)$
3. $z=3\left(\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{2}\right)$; $z=3\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\operatorname{sen}\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$
5. $z=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{9\pi}{4}+i\operatorname{sen}\dfrac{9\pi}{4}\right)$; $z=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}\right)$
7. $z=2\left[\cos\left(-\dfrac{7\pi}{6}\right)+i\operatorname{sen}\left(-\dfrac{7\pi}{6}\right)\right]$; $z=2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6}+i\operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{6}\right)$
9. $z=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{4}+i\operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{4}\right)$; $z=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)+i\operatorname{sen}\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)\right]$

Ejercicios V. Represente en la forma binómica los siguientes números complejos

15. $z=5\left(\cos\dfrac{7\pi}{6}+i\operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{6}\right)$
16. $z=8\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{11\pi}{4}+i\operatorname{sen}\dfrac{11\pi}{4}\right)$
17. $z=6\left(\cos\dfrac{\pi}{8}+i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{8}\right)$
18. $z=10\left(\cos\dfrac{\pi}{5}+i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{5}\right)$

Ejercicios VI. En los problemas 19 y 20, calcule $(z_1)(z_2)$y z_1/z_2. Exprese el resultado en la forma binómica.

19. $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{8}\right)$, $z_2 = 4\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\,\mathrm{sen}\frac{3\pi}{8}\right)$

20. $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{4}\right)$, $z_2 = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{12}\right)$

Solución del ejercicio 19: $8i$, $\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}i$

Ejercicios VII. Calcule las potencias indicadas, exprese el resultado en la forma binómica.

25. $(1 + \sqrt{3}i)^9$

26. $(2 - 2i)^5$

27. $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{10}$

28. $(-\sqrt{2} + \sqrt{6}i)^4$

29. $\left[\left(\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8} + i\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{8}\right)\right]^{12}$

30. $\left[\sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{9} + i\,\mathrm{sen}\frac{2\pi}{9}\right)\right]^6$

En los problemas 31 y 32 escriba en forma polar el número complejo dado y después en la forma $a + ib$.

31. $\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{9}\right)^{12}\left[2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)\right]^5$

32. $$\frac{\left[8\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\,\mathrm{sen}\frac{3\pi}{8}\right)\right]^3}{\left[2\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{16}\right)\right]^{10}}$$

Soluciones de los ejercicios VII

25. -512

27. $\frac{1}{32}i$

29. $-64i$

31. $32\left(\cos\frac{13\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{13\pi}{6}\right) = 16\sqrt{3} + 16i$

32. $i/2$

Ejercicios VIII. Calcule todas las raíces y grafíquelas en el plano complejo.

Vídeo 9: [Raíces de números complejos - Ejemplo 1 - YouTube]

Vídeo 10: [Raíces de números complejos - Ejemplo 2 - YouTube]

1. $(8)^{1/3}$

2. $(-1)^{1/4}$

3. $(-9)^{1/2}$

4. $(-125)^{1/3}$

5. $(i)^{1/2}$

6. $(-i)^{1/3}$

7. $(-1+i)^{1/3}$

8. $(1+i)^{1/5}$

9. $(-1+\sqrt{3}i)^{1/2}$

10. $(-1-\sqrt{3}i)^{1/4}$

11. $(3+4)^{1/2}$

12. $(5+12i)^{1/2}$

13. $\left(\dfrac{16i}{1+i}\right)^{1/8}$

14. $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^{1/6}$

15. **(a)** Compruebe que $(4+3i)^2 = 7+24i$.

(b) Use el inciso (a) para encontrar los dos valores de $(7+24i)^{1/2}$.

Soluciones de los ejercicios VIII

En las respuestas de la 1 a la 13, la n-ésima raíz principal está dada primero

1. $w_0 = 2,\ w_1 = -1+\sqrt{3}i\ \ w_2 = -1-\sqrt{3}i$

3. $w_0 = 3i,\ w_1 = -3i$

5. $w_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i,\ w_1 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

7. $w_0 = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}i,\ w_1 \approx -1.0842 + 0.2905i,\ w_2 \approx 0.2905 - 1.0842i$

9. $w_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{6}}{2}i,\ w_1 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{6}}{2}i$

11. $w_0 = 2 + i,\ w_1 = -2 - i$

13. $w_0 \approx 1.3477 + 0.1327i,\ w_1 \approx 0.8591 + 1.0469i,$

$w_2 \approx -0.1327 + 1.3477i,\ w_3 \approx -1.0469 + 0.8591i,$

$w_4 \approx -1.3477 - 0.1327i,\ w_5 \approx -0.8591 - 1.0469i,$

$w_6 \approx 0.1327 - 1.3477i,\ w_7 \approx 1.0469 - 0.8591i$

15. **(b)** $4 + 3i,\ -4 - 3i$

17. $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i);\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$

Ejercicios IX. Calcule todas las soluciones de las siguientes ecuaciones

1) $z^4 + 1 = 0$ Solución: $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i);\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$

2) $z^2 + i = 0$ Solución: $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i.$ $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

Ejercicios X. Determine los números complejos z que satisfacen las siguientes ecuaciones

Vídeo 11: Ecuaciones con números complejos - Ejemplo 1 - YouTube

Vídeo 12: Ecuaciones con números complejos - Ejemplo 2 - YouTube

(a) $-z + i = -i + 3$

(b) $(-1 + i)z - (1 - i) = 2 + 3i$

(c) $\overline{(z - 3i)}(5 - 4i) = z + 1$

(d) $iz + 3i = -3i$

(e) $\frac{i}{z} + 1 - 3i = -\frac{3}{i}$

(f) $4z + 3iz = (4 - 3i)z + 6$

Soluciones de los ejercicios X

$$\boldsymbol{b})\quad z = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$$

$$\boldsymbol{c})\quad z = \frac{1}{2} - \frac{13}{4}i$$

$$\boldsymbol{d})\quad z = -6$$

$$\boldsymbol{f})\quad z = -i$$

Ejercicios XI

1. Sea $z = (3-6i)(4-ki)$ Calcule el valor de k para que z sea un número imaginario puro. (Sol. $k = 2$)

2. Sea $z = (3-6i)(4-ki)$ Calcule el valor de k para que z sea un número real. (Sol. $k = -8$)

3. Sea $z = (3\underline{|30°})(3-ki)$ Calcule el valor de k para que z sea un número imaginario puro. (Sol. $k = -5.1961$)

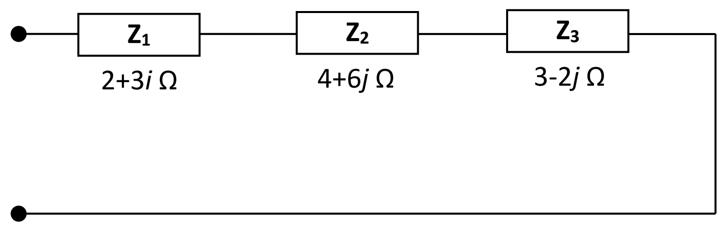
4. Sea $z = \dfrac{3-ki}{1-i}$, calcule el valor de k para que $\arg(z) = \dfrac{\pi}{3}$. (Sol. $k = -0.8038$)

5. Una raíz cúbica de un número complejo es $1+i$. Halle dicho número complejo y sus otras dos raíces cúbicas.

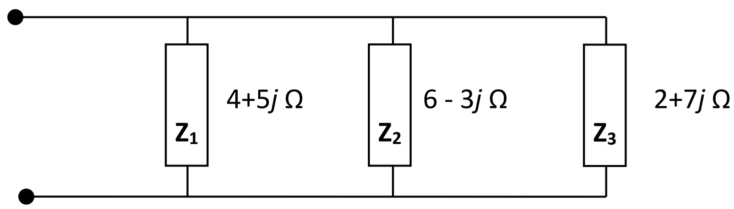
6. De un pentágono regular centrado en el origen conocemos un vértice que es el punto $(1,-\sqrt{3})$. Calcule los restantes vértices.

Ejercicios XII. Calcule la impedancia equivalente de los siguientes circuitos:

(Resultado: Zeq = 9 + 7i)



(Resultado: Zeq = 2.5043 + 1.7467*i*)



(Resultado: Zeq = 4.8757 + 4.5459*i*)