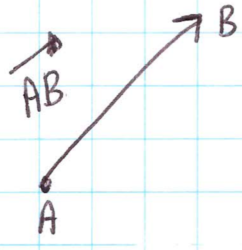
Vectores

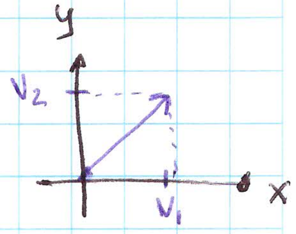
Definición geométrica



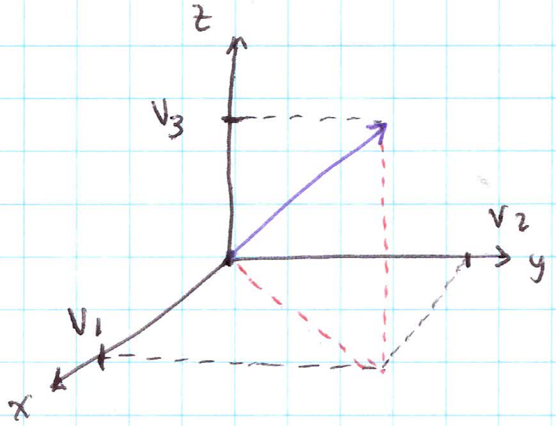
(Punto final)

(punto inicial)

Vector: segmento de recta dirigido.



- Vectores en $\mathbb{R}^2$ (bidimensional) $v = (v_1, v_2)$
- Vectores en $\mathbb{R}^3$ (tridimensional) $v = (v_1, v_2, v_3)$



- Vectores en $\mathbb{R}^4$: $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$

  No existe representación gráfica, sólo representación algebraica.

- Vectores en $\mathbb{R}^n$: $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$

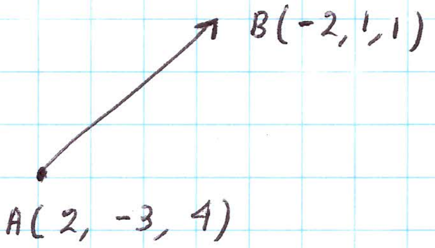
$v_1, v_2, \dots, v_n$ son las <u>componentes</u> del vector

- Componentes de un vector

Dados los puntos $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(X_2, Y_2, Z_2)$, el vector $\overrightarrow{AB}$ es:

$$\overrightarrow{AB} = (X_2 - X_1 \,, \, y_2 - y_1 \,, \, z_2 - z_1)$$

Ej. Calcule el vector $\overrightarrow{AB}$



$$\overrightarrow{AB} = (-2-2 \,, \, 1+3 \,, \, 1-4)$$

$$\overrightarrow{AB} = (-4, \, 4, \, -3) = -4i + 4j - 3k$$

- Norma, magnitud ó longitud

Si $v = (v_1, v_2)$ $\qquad |v| = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2}$

Si $v = (v_1, v_2, v_3)$ $\qquad |v| = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2 + (v_3)^2}$

- Dirección

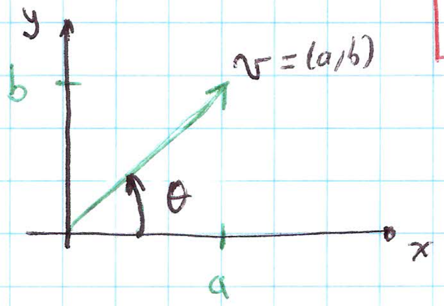
$v = (a, b)$

$$\boxed{\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a}}$$

Componentes

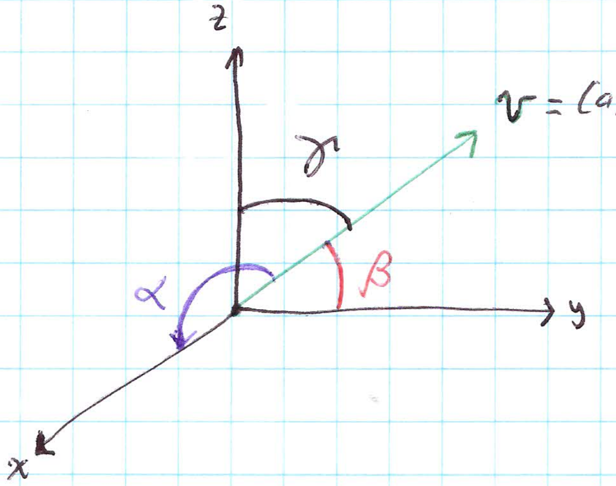
$$\boxed{\begin{aligned} a &= |v| \cos \theta \\ b &= |v| \operatorname{sen} \theta \end{aligned}}$$

En $\mathbb{R}^2$



Ángulos directores

En $\mathbb{R}^3$



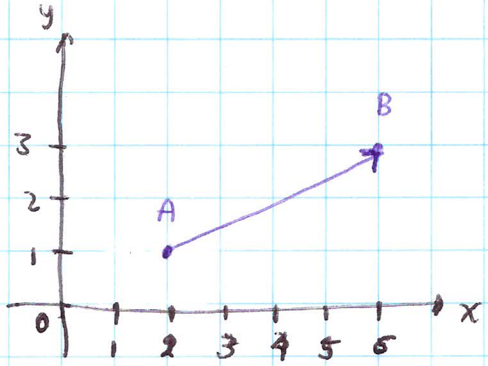
Cosenos directores

$$\cos \alpha = \frac{a}{|v|}$$

$$\cos \beta = \frac{b}{|v|}$$

$$\cos \gamma = \frac{c}{|v|}$$

Ej.

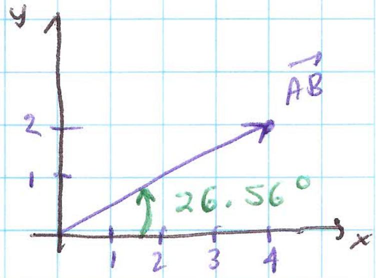


Ej. Determine :

a) Componentes del vector $\overrightarrow{AB}$

b) Norma

c) Dirección



A(2,1) B(6,3)

a) $\overrightarrow{AB} = (6-2, 3-1) = (4, 2)$

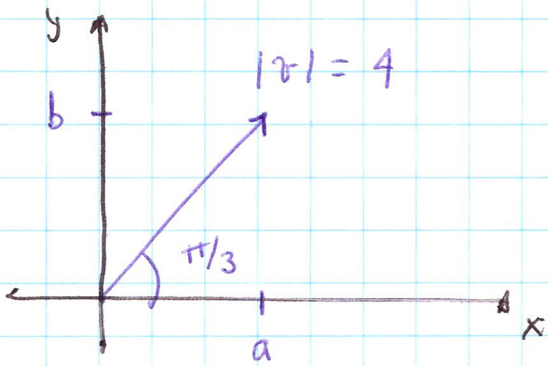
b) $\| \overrightarrow{AB} \| = \sqrt{(4)^2 + (2)^2} = \sqrt{20}$

c) $\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a} = \tan^{-1} \frac{2}{4} = 26.56°$

Ej. Encuentre las componentes del vector v con magnitud 4 y dirección $\pi/3$.

$\| v \| = 4$

$\theta = \pi/3$



$a = |v| \cos\theta = 4 \cos 60°$

$a = 2$

$b = |v| \operatorname{Sen}\theta = 4 \operatorname{Sen} 60$

$b = 2\sqrt{3}$

$v = (2, 2\sqrt{3})$

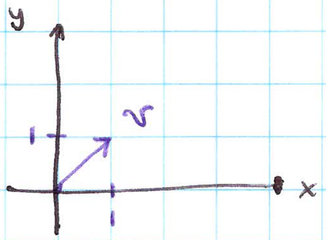
Operaciones con Vectores

- Multiplicación de un vector por un escalar

Sea $v = (v_1, v_2, v_3)$ y c un escalar

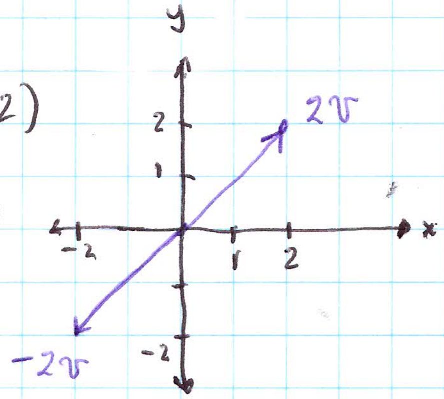
$$cv = (cv_1, cv_2, cv_3)$$

Ej. Sea $v = (1, 1)$



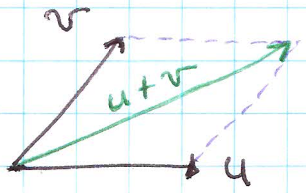
$2v = (2, 2)$

$-2v = (-2, 2)$



El vector $-v$ tiene la misma longitud que v, pero en dirección opuesta.

- Suma de Vectores



Regla del paralelogramo

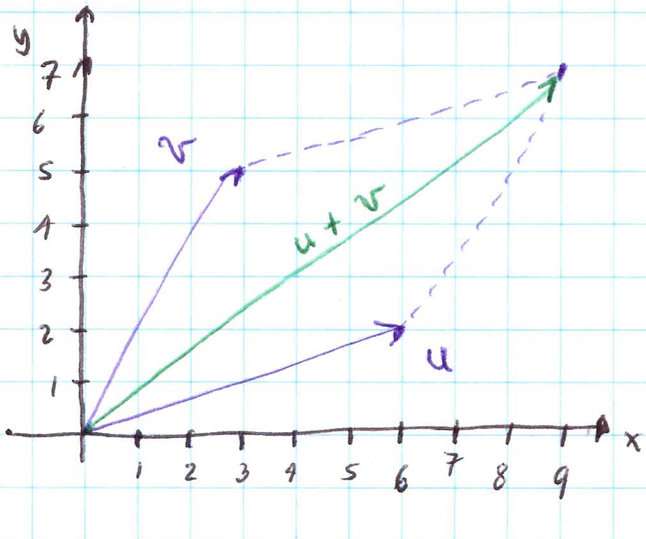
Sean $u = (u_1, u_2, u_3)$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$

$$u + v = (u_1 + v_1, \; u_2 + v_2, \; u_3 + v_3)$$

Ej. Calcular $u + v$ y graficar

$u = (6, 2)$
$v = (3, 5)$

$u + v = (9, 7)$



Vectores base estándar

En $\mathbb{R}^2$ $\quad i = (1,0) \quad j = (0,1)$

$$v = (v_1, v_2)$$
$$v = (v_1, 0) + (0, v_2)$$
$$v = v_1 (1,0) + v_2 (0,1)$$

$$v = v_1 i + v_2 j$$

En $\mathbb{R}^3$ $\quad i = (1,0,0)$

$j = (0,1,0)$

$k = (0,0,1)$

$\cancel{v = (v_1, v_2, v_3)}$

$\cancel{= (v_1, 0, 0) + (0, v_2, 0) +}$

$$v = (v_1, v_2, v_3)$$
$$= (v_1, 0, 0) + (0, v_2, 0) + (0, 0, v_3)$$
$$= v_1 (1,0,0) + v_2 (0,1,0) + v_3 (0,0,1)$$
$$= v_1 i + v_2 j + v_3 k$$

Ej. $\quad v = (1, 3) = i + 3j$

$v = (1, -2, 6) = i - 2j + 6k$

Vector Unitorio

Un vector unitario es un vector con longitud 1.

Ej. ¿ El vector $u = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ es unitario ?

$$\|u\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

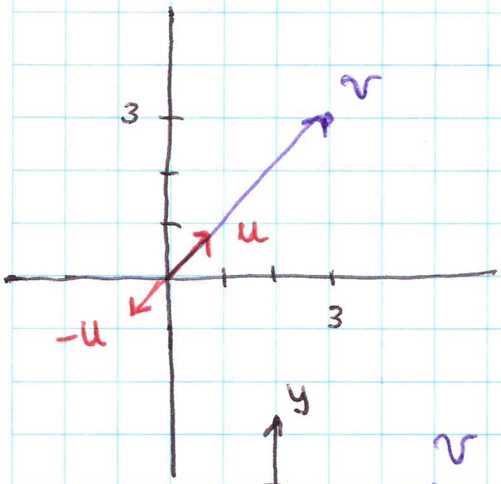
Vector unitario : $\boxed{u = \frac{v}{|v|}}$

Ej. Sea el vector $v = (3, 3)$

a) Encuentre un vector unitario en la dirección de v

b) Encuentre un vector unitario en dirección opuesta a v

c) Encuentre un vector en dirección de v con magnitud 2.



a) $v = (3, 3)$ $\quad |v| = \sqrt{18}$

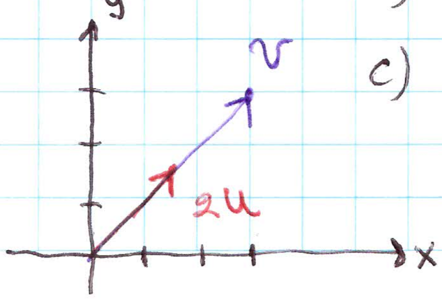
$|v| = 3\sqrt{2}$

$$u = \frac{v}{|v|} = \left(\frac{3}{3\sqrt{2}}, \frac{3}{3\sqrt{2}}\right)$$

$$u = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (0.7071, 0.7071)$$

b) $-u = (-0.7071, -0.7071)$

c) $2u = (1.4142, 1.4142)$



Ej. Encuentre un vector con longitud 2, en dirección opuesta a $3v-2w$, donde:

$$v=(1,2)$$
$$w=(5,4)$$

$$3v-2w = 3(1,2)-2(5,4)=(3,6)-(10,8)$$
$$=(-7,-2) = -7i-2j$$

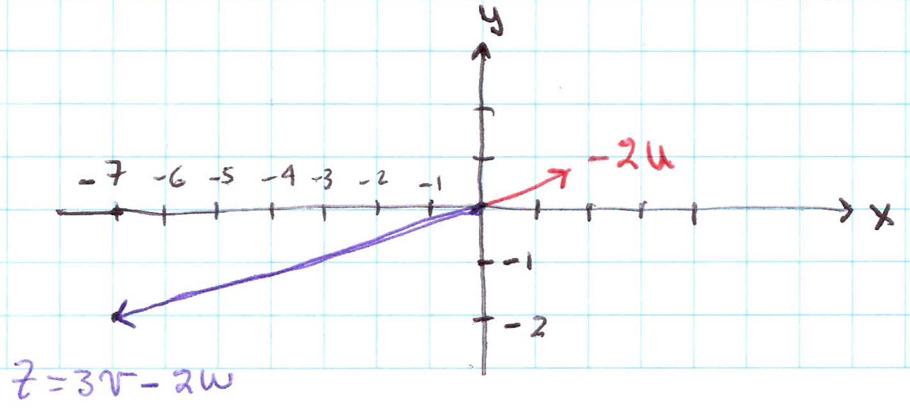
$$z=-7i-2j$$

Vector unitario $u=\frac{z}{|z|} = \frac{(-7,-2)}{\sqrt{53}} = \left(\frac{-7}{\sqrt{53}}, \frac{-2}{\sqrt{53}}\right)$

$$|z|=\sqrt{(-7)^2+(-2)^2}=\sqrt{53}$$

$$-u=\left(\frac{7}{\sqrt{53}}, \frac{2}{\sqrt{53}}\right)$$

$$-2u=\left(\frac{14}{\sqrt{53}}, \frac{4}{\sqrt{53}}\right) \approx (1.9230,\ 0.5494)$$



Producto Punto (Producto escalar)

Sean los vectores $u = (u_1, u_2, u_3)$

$v = (v_1, v_2, v_3)$

entonces: $u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$

Producto Cruz (Producto Vectorial)

$$u \times v = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \end{array} \quad \cancel{\neq (u_1 v_3 - u_3 v_2)\, i}$$

$$= (u_2 v_3 - u_3 v_2)\, i - (u_1 v_3 - u_3 v_1)\, j + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\, k$$

FIRST CLASS

Ej: Sean los vectores $u = (1, 3, 4)$
$v = (2, 7, -5)$

Calcule:

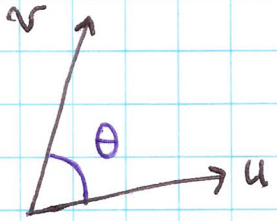
a) $u \cdot v$
b) $u \times v$

$$u \cdot v = (1,3,4) \cdot (2,7,-5)$$
$$= 2 + 21 - 20 = \underline{3}$$

$$u \times v = \begin{array}{ccc} + & - & + \\ \end{array}$$
$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= (-15 - 28)\,i - (-5 - 8)\,j + (7 - 6)\,k$$
$$= -43\,i + 13\,j + k$$
$$= \underline{(-43, 13, 1)}$$

Ángulo entre vectores

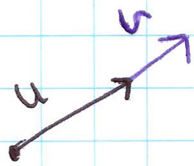


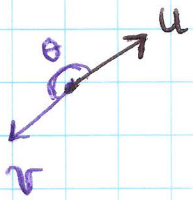
$0 \leq \theta \leq \pi$

$$\boxed{\cos \theta = \frac{u \cdot v}{|v|\,|v|}}$$

Vectores Paralelos

$\theta = 0$ o $\theta = \pi$



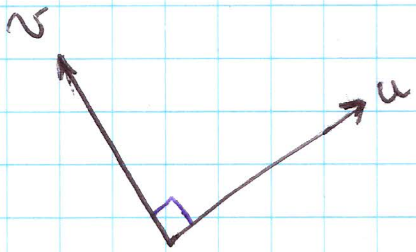


Si $u \times v = 0$,

entonces u y v son paralelos

Vectores ortogonales o perpendiculares

$\theta = \frac{\pi}{2}$

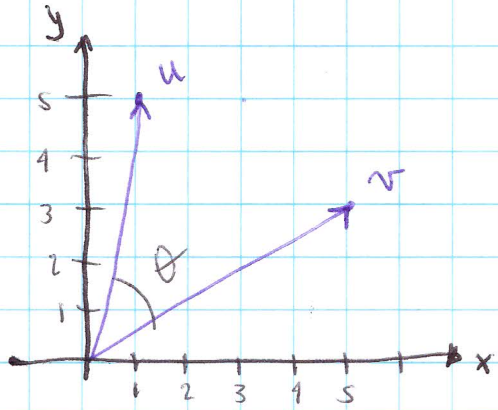


Si $u \cdot v = 0$

entonces u y v son ortogonales

Ej. Calcule el ángulo entre los vectores

$u = (1, 5)$ y $v = (5, 3)$



$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{|u|\,|v|}$$

$$= \frac{(1,5)\cdot(5,3)}{\sqrt{26}\ \sqrt{34}}$$

$$= \frac{5+15}{\sqrt{884}} = \frac{20}{\sqrt{884}}$$

$$\cos\theta = \frac{20}{\sqrt{884}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{20}{\sqrt{884}}\right)$$

$$\theta = 47.72^\circ$$

a) Calcule el ángulo entre los vectores dados.

Ej: b) Determine si los siguientes vectores son paralelos u ortogonales

a) $u = 2i + 2j - k$, $v = 5i - 4j + 2k$

b) $u = 2i + 2j - k$, $v = 5i - 3j + 2k$

c) $u = -6i + 4j + 10k$, $v = 9i - 6j - 15k$

a) $\cos\theta = \dfrac{u \cdot v}{|v|\,|v|} = \dfrac{(2,2,-1)\cdot(5,-4,2)}{\sqrt{9}\;\sqrt{45}}$

$= \dfrac{10-8-2}{3\sqrt{45}} = \dfrac{0}{3\sqrt{45}} = 0$

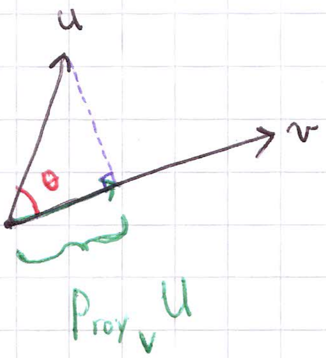
$\cos\theta = 0$ $\quad \theta = \cos^{-1} 0$ $\quad \boxed{\theta = 90^\circ}$ $\boxed{\theta = \frac{\pi}{2}}$

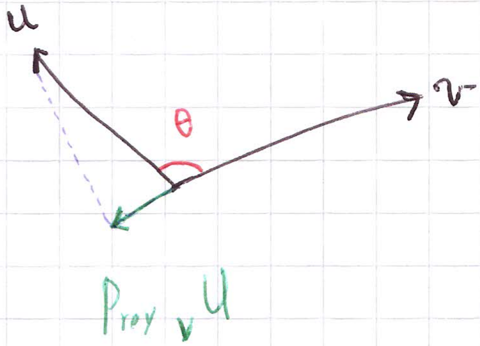
u y v son ortogonales

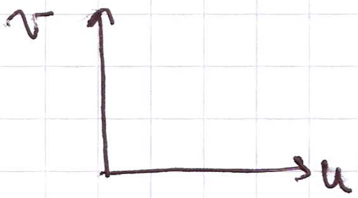
Proyección

Sean u y v dos vectores diferentes de cero. Entonces la proyección de u sobre v es un vector denotado y definido por:

$$\boxed{\text{Proy}_v u = \frac{u \cdot v}{|v|^2} v}$$







$\text{Proy}_v u = 0$

Ej. Sean los vectores $u = 4i + j$

$v = 2i + 3j$

Calcule:

a) $Proy_v\, u$

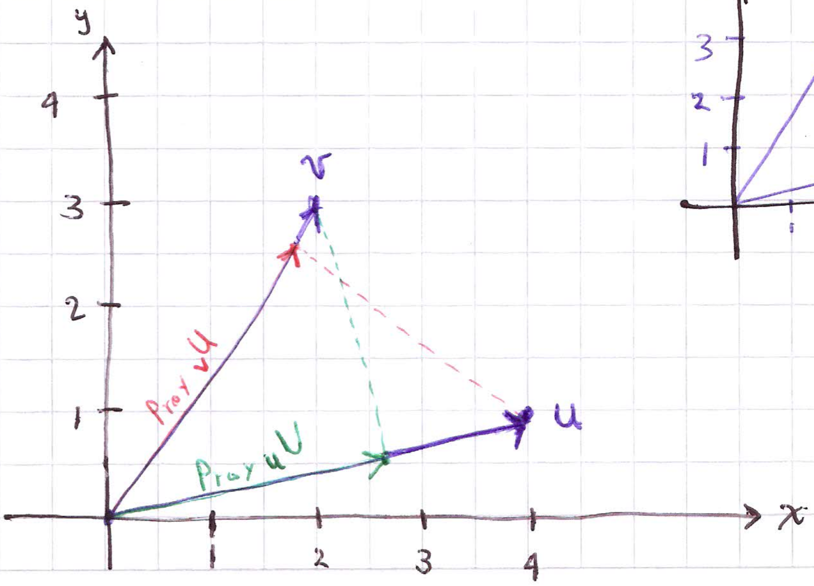
b) $Proy_u\, v$

a) $$Proy_v\, u = \frac{u \cdot v}{|v|^2} v = \frac{(4,1)\cdot(2,3)}{\sqrt{13}^2}(2,3)$$

$$= \frac{8+3}{13}(2,3) = \left(\frac{22}{13}, \frac{33}{13}\right) = (1.69,\ 2.53)$$

b) $$Proy_u\, v = \frac{v \cdot u}{|u|^2} u = \frac{(2,3)\cdot(4,1)}{\sqrt{17}^2}(4,1)$$

$$= \frac{11}{17}(4,1) = \left(\frac{44}{17}, \frac{11}{17}\right) = (2.58,\ 0.64)$$

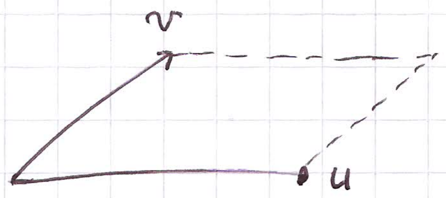


Área del Paralelogramo

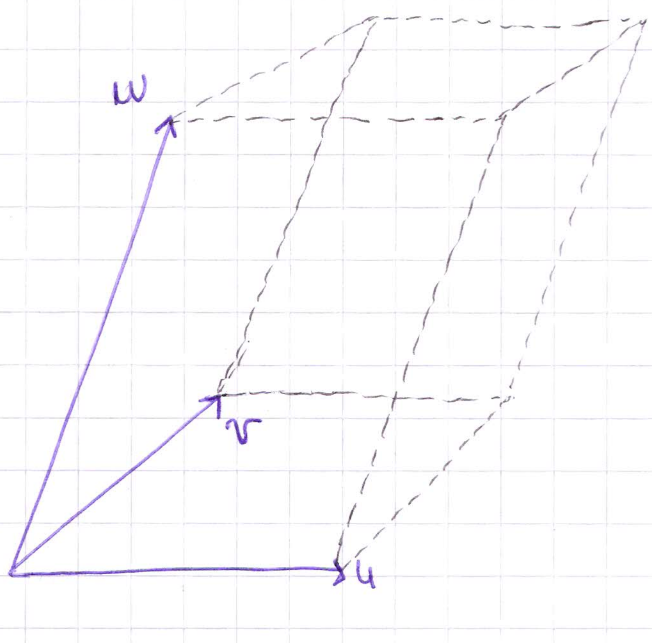
Sean u y v dos vectores no nulos y no paralelos los lados de un paralelogramo.

El área del paralelogramo se define como:

$$A = \| u \times v \|$$



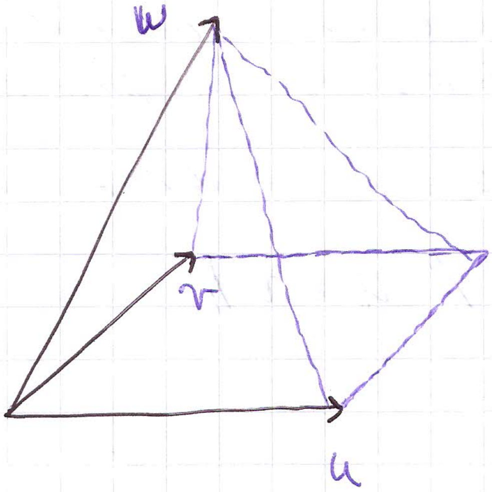
Volumen del Paralelepípedo



$$V = \| w \cdot (u \times v) \|$$

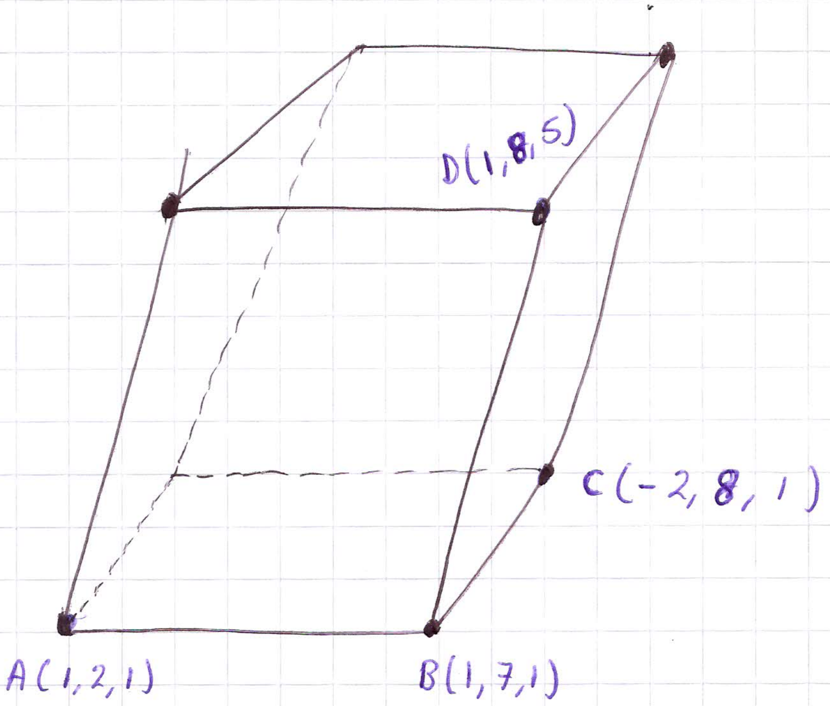
(triple producto escalar)

Volumen de la Pirámide



$$V = \frac{1}{3} \, \| w \cdot (u \times v) \|$$

Ejemplo



Calcular:

a) El área del paralelogramo formado por los vértices A, B, C
b) El volumen del paralelepipedo
c) El ángulo entre $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$

d) La proyección $Proy_{\overrightarrow{BA}} \overrightarrow{BD}$

a) $\vec{BA} = (1,2,1) - (1,7,1) = (0,-5,0)$

$\vec{BC} = (-2,8,1) - (1,7,1) = (-3,1,0)$

$\vec{BD} = (1,8,5) - (1,7,1) = (0,1,4)$

$A = \| \vec{BA} \times \vec{BC} \|$

$$\vec{BA} \times \vec{BC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -5 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0)i - (0)j + (15)k$$

$$= (0, 0, 15)$$

$A = \sqrt{(0)^2 + (0)^2 + (15)^2} = 15\ u^2$

b) $V = \| \vec{BD} \cdot (\vec{BA} \times \vec{BC}) \|$

$= \| (0,1,4) \cdot (0,0,15) \| = \| 0 + 0 + 60 \|$

$V = 60\ u^3$

Valores Propios y Vectores Propios

(Eigenvalores y Eigenvectores)

Si A es una matriz de $n \times n$, entonces un vector x diferente de cero en $\mathbb{R}^n$ se denomina eigenvector de A si Ax es un múltiplo escalar de x:

$$Ax = \lambda x$$

para algún escalar λ. El escalar λ se denomina eigenvalor de A.

Diagonalización

Una matriz cuadrada A es diagonalizable si existe una matriz invertible P tal que $P^{-1}AP$ es una matriz diagonal. Se dice que P diagonaliza a A.

También $\quad P^{-1}AP = D$

donde:

P: Matriz cuyas columnas son vectores propios de A linealmente independientes

D: Matriz diagonal. La diagonal son los valores propios de A

Ej. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

a) Encuentre los valores propios y vectores propios

b) Demuestre que $P^{-1}AP = D$

1) Se forma la ecuación $(A - \lambda I)x = 0$

$A - \lambda I =$

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 3 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$(A - \lambda I)x = 0$

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(5-\lambda)x_1 - x_2 = 0 \quad \text{......} (1)$$
$$3x_1 + (1-\lambda)x_2 = 0$$

2) $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(1-\lambda) + 3 = 5 - 5\lambda - \lambda + \lambda^2 + 3$$

$$= \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 4)(\lambda - 2) = 0$$

$\uparrow$

Polinomio característico

$$\boxed{\begin{array}{l} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = 2 \end{array}}$$

Sustitución de $\lambda_1 = 4$ en (1)

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 = 0 \end{array}\right\}$$ Una ec'n es múltiplo de la otra. El sistema tiene solución múltiple

$$x_1 - x_2 = 0$$

$x_1 = x_2$ Si $x_1 = 1$, entonces $x_2 = 1$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ eigenvector $x^{(1)}$

Sustitución de $\lambda_2 = 2$ en (1)

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1 - x_2 = 0 \\ 3x_1 - x_2 = 0 \end{array}\right\}$$ El sistema tiene solución múltiple

$3x_1 = x_2$, si $x_1 = 1$, entonces $x_2 = 3$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$ eigenvector $x^{(2)}$

Matriz $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

---

b)

Matriz de cofactores

$|P| = 3 - 1 = 2$ $P_c = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $P_c^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$P^{-1} = \frac{1}{|P|} \mathrm{Adj}(P) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = D$$