$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj } A$$

Matriz Inversa

Método de la Matriz Adjunta

Profe Tejada

Matriz Inversa

En el álgebra matricial, la división no está definida. Como alternativa se recurre a la inversión de matrices.

La inversa de una matriz, que se denota por A^{-1}, está definida como aquella matriz que multiplicada por la original da como resultado la matriz identidad:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

A: matriz original

A^{-1}: matriz inversa

I: matriz identidad

Matriz Inversa por el Método de la Matriz Adjunta

Una matriz cuadrada A tiene inversa si es “no singular”, es decir, su determinante es diferente de cero, det(A) ≠ 0.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Adj(A)$$

A^{-1}: matriz inversa
det(A): determinante de A
Adj(A) = Matriz adjunta (matriz de cofactores transpuesta)

Ejemplo. Calcule A^{-1} por el método de la matriz adjunta

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Adj(A)$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$\det(A) = 14 - 12 = \underline{2}$ $\therefore$ A^{-1} existe

Matriz de cofactores

$$A_c = \begin{bmatrix} +A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & +A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_c^T = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = Adj(A)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1} = \begin{bmatrix} 7/2 & -3/2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}}$$

Ejemplo. Calcule A^{-1} por el método de la matriz adjunta

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Adj(A)$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 7/2 & -3/2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A A^{-1} = A^{-1} A = I$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7/2 & -3/2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-6 & -3+3 \\ 14-14 & -6+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Ejemplo. Calcule B-1 por el método de la matriz adjunta

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Adj(A)$$

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$$\det(B) = 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 1(-4-3) - 3(8-12)$$

$$= -7 - 3(-4) = -7 + 12$$

$$\det(B) = 5$$

$\therefore$ B^{-1} existe

Ejemplo. Calcule B^{-1} por el método de la matriz adjunta

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Adj(A)$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$$\det(B) = 5$$

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_c = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+12 & -(0+4) & 12-1 \\ -(0-9) & 0-3 & -(-6-1) \\ -4-3 & -(8-12) & (-2-4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & -4 & 11 \\ 9 & -3 & 7 \\ -7 & 4 & -6 \end{bmatrix} \qquad B_c^T = \begin{bmatrix} 12 & 9 & -7 \\ -4 & -3 & 4 \\ 11 & 7 & -6 \end{bmatrix} = Adj(B)$$

Ejemplo. Calcule B^{-1} por el método de la matriz adjunta

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Adj(A)$$

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 12 & 9 & -7 \\ -4 & -3 & 4 \\ 11 & 7 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12/5 & 9/5 & -7/5 \\ -4/5 & -3/5 & 4/5 \\ 11/5 & 7/5 & -6/5 \end{pmatrix}$$

Comprobación

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 12 & 9 & -7 \\ -4 & -3 & 4 \\ 11 & 7 & -6 \end{bmatrix}$$

$$B * B^{-1} = B^{-1} * B = I \text{ (matriz identidad)}$$

$$B^{-1} * B = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 12 & 9 & -7 \\ -4 & -3 & 4 \\ 11 & 7 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -24+36-7 & 12+9-21 & 36-36 \\ 8-12+4 & -4-3+12 & -12+12 \\ -22+28-6 & 11+7-18 & 33-28 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Ejercicio. Calcule la inversa de las siguientes matrices por el método de la matriz adjunta

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} -13/4 & 7/4 & 1/4 \\ 7/4 & -5/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}=\begin{bmatrix} 2/7 & 3/7 \\ -1/7 & 2/7 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Matriz Inversa

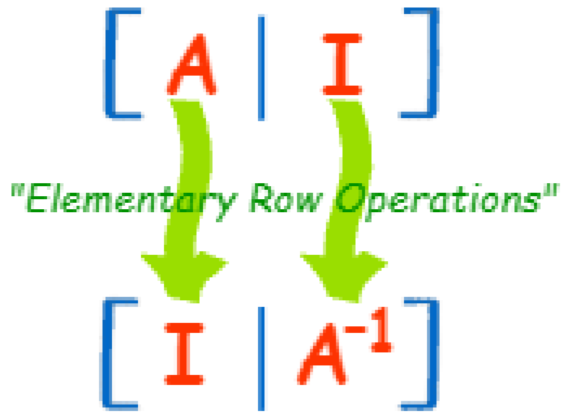
Método de Gauss - Jordan

Profe Tejada

Matriz Inversa por el Método de Gauss – Jordan

Para obtener A^{-1}, se realizan operaciones elementales filas hasta conseguir la matriz identidad en el bloque izquierdo de la matriz por bloques.

Matriz por bloques:



$$\left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

A: matriz original de nxn

I: matriz identidad de orden nxn

Ejemplo. Calcule A^{-1} por el método de Gauss – Jordan

$(A \mid I)$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right] R_1\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} R_1(-4) + R_2$$

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} R_2\left(-\tfrac{3}{2}\right) + R_1$$

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7/2 & -3/2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \left[I \mid A^{-1} \right]$$

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 7/2 & -3/2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}$$

Ejemplo. Calcule A^{-1} por el método de Gauss – Jordan

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

Ejemplo. Calcule B^{-1} por el método de Gauss - Jordan

$$(B \mid I) \Rightarrow (I \mid B^{-1})$$

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] R_1 \leftrightarrow R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1(-4)+R_2 \\ R_1(2)+R_3 \end{matrix}$$

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -11 & -4 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 7 & 3 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} R_2\left(-\frac{1}{11}\right)$$

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4/11 & 0 & -\frac{1}{11} & 4/11 \\ 0 & 7 & 3 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo. Calcule B^{-1} por el método de Gauss - Jordan

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4/11 & 0 & -1/11 & 4/11 \\ 0 & 7 & 3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ R_2(-3)+R_1 \\ R_2(-7)+R_3 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -12/11 & 0 & 3/11 & -1/11 \\ 0 & 1 & 4/11 & 0 & -1/11 & 4/11 \\ 0 & 0 & 5/11 & 1 & 7/11 & -6/11 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ R_3\left(\frac{11}{5}\right) \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -12/11 & 0 & 3/11 & -1/11 \\ 0 & 1 & 4/11 & 0 & -1/11 & 4/11 \\ 0 & 0 & 1 & 11/5 & 7/5 & -6/5 \end{pmatrix}$$

$$\frac{4}{11}(-3)+1 = \frac{-12}{11} + \frac{11}{11} = -\frac{1}{11}$$

$$\frac{4}{11}(-7)+3 = -\frac{28}{11} + \frac{33}{11} = \frac{5}{11}$$

$$\frac{4}{11}(-7)+2 = \frac{-28}{11} + \frac{22}{11} = -\frac{6}{11}$$

Ejemplo. Calcule B^{-1} por el método de Gauss - Jordan

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -12/11 & 0 & 3/11 & -1/11 \\ 0 & 1 & 4/11 & 0 & -1/11 & 4/11 \\ 0 & 0 & 1 & 11/5 & 7/5 & -6/5 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_3\left(\frac{12}{11}\right)+R_1 \\ R_3\left(-\frac{4}{11}\right)+R_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 12/5 & 9/5 & -7/5 \\ 0 & 1 & 0 & -4/5 & -3/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & 1 & 11/5 & 7/5 & -6/5 \end{array}\right)$$

$$\frac{7}{5}\left(\frac{12}{11}\right) + \frac{3}{11} = \frac{84}{55} + \frac{3}{11} = \frac{84+15}{55} = \frac{99}{55} = \frac{9}{5}$$

$$-\frac{6}{5}\left(\frac{12}{11}\right) - \frac{1}{11} = -\frac{72}{55} - \frac{1}{11} = \frac{-72-5}{55} = -\frac{77}{55} = \frac{-7}{5}$$

$$\frac{7}{5}\left(-\frac{4}{11}\right) - \frac{1}{11} = -\frac{28}{55} - \frac{1}{11} = \frac{-28-5}{55} = \frac{-33}{55} = \frac{-3}{5}$$

$$-\frac{6}{5}\left(-\frac{4}{11}\right) + \frac{4}{11} = \frac{24}{55} + \frac{4}{11} = \frac{24+20}{55} = \frac{44}{55} = \frac{4}{5}$$

Ejemplo. Calcule B^{-1} por el método de Gauss - Jordan

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 12/5 & 9/5 & -7/5 \\ -4/5 & -3/5 & 4/5 \\ 11/5 & 7/5 & -6/5 \end{pmatrix}$$

Ejercicio. Calcule la inversa de las siguientes matrices aplicando el método de Gauss - Jordan

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} -13/4 & 7/4 & 1/4 \\ 7/4 & -5/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}=\begin{bmatrix} 2/7 & 3/7 \\ -1/7 & 2/7 \end{bmatrix}$$