Álgebra Lineal

Matrices

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2} \qquad \begin{bmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 1 & 8 & 5 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Profe Tejada

¿Qué son las matrices?

Una matriz es un ordenamiento rectangular de números o funciones.

El orden de una matriz es el número de filas (o renglones) x el número de columnas.

$$a)\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & -3 & 4 & -9 \end{bmatrix} \quad b)\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 4 \\ 7 & -9 & 0 \end{bmatrix} \quad c)\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 6 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

2×4 $\quad$ 3×3 $\quad$ 3×2

$A(1,1) = -1$

$A(2,1) = 3$

$A(1,2) = 2$

$B(2,2) = -3$

Matriz de orden *m* x *n*

m: número de filas

n: número de columnas

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \dots & n \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ m \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

Matriz cuadrada: Una matriz cuadrada es una matriz que tiene el mismo número de filas que de columnas.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 1 & 8 & 5 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ a & b & c & 1 \\ p & q & r & 1 \\ m & n & o & 1 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

Matriz diagonal: Una matriz diagonal es una matriz cuadrada en la que todos los elementos que no son de la diagonal principal son cero (0).

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Matriz identidad: La matriz Identidad es una matriz cuadrada llena de ceros (0) excepto en la diagonal principal, donde todos los elementos son unos (1).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz triangular: Una matriz triangular es una matriz cuadrada la cual tiene triángulos de ceros por encima o por debajo de la diagonal principal dependiendo de si es una matriz triangular superior o una matriz triangular inferior.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 7 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \\ 1 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

Triangular superior

Triangular inferior

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriz transpuesta: Una matriz traspuesta es el resultado de reordenar la matriz original mediante el cambio de filas por columnas y las columnas por filas.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -8 & 10 & 3 \\ -2 & -3 & -9 \end{bmatrix}$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 2 & -8 & -2 \\ 4 & 10 & -3 \\ 5 & 3 & -9 \end{bmatrix}$$

Matriz simétrica: Una matriz simétrica es una matriz cuadrada cuya traspuesta es igual a la propia matriz. La diagonal principal de una matriz simétrica es un eje de simetría entre los números por encima de la diagonal y los de debajo.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Vector: Un vector es un caso particular de matriz en el que una de sus dimensiones es 1. Denominaremos vector fila a una matriz 1 × n y vector columna a una matriz m × 1.

Vector fila $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}_{1 \times n}$ Vector columna $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}_{m \times 1}$

Ejercicio: identifique el tipo y orden de las siguientes matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

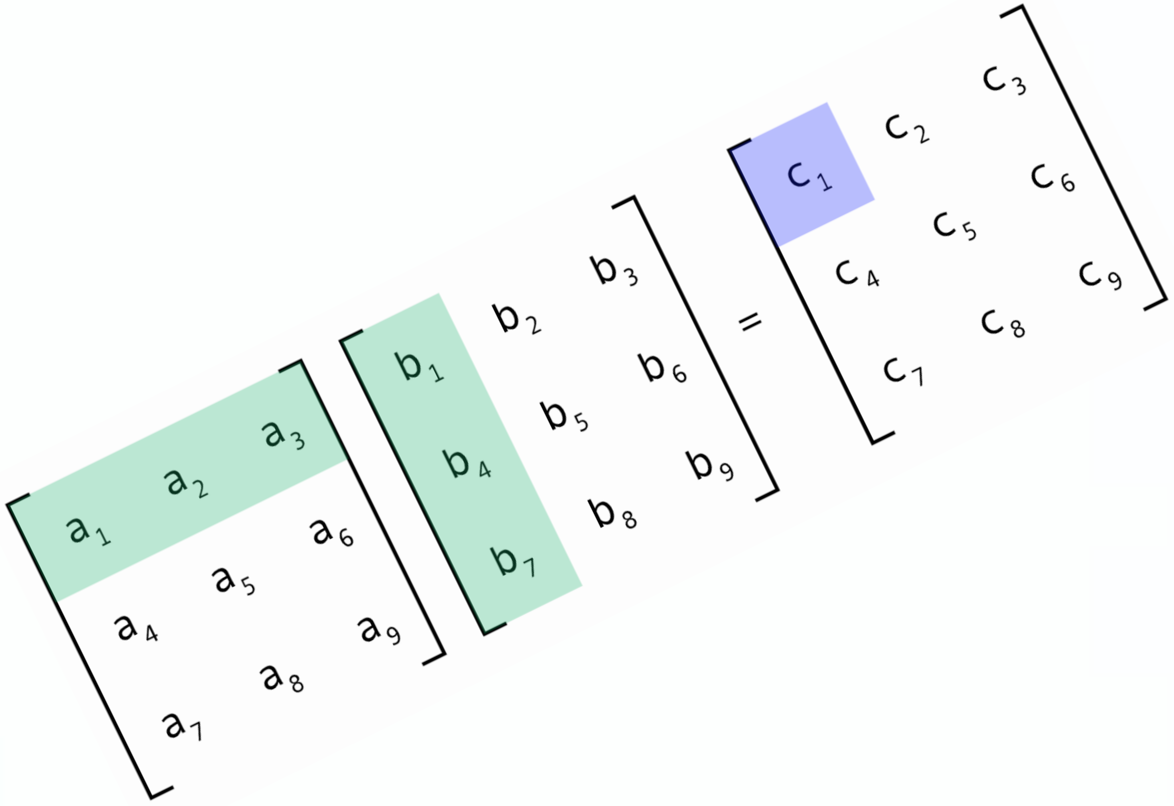
$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$



Álgebra Lineal

Operaciones con Matrices

Profe Tejada

¿Cómo sumar matrices?

Dos matrices se pueden sumar solo si tienen las mismas dimensiones, es decir, son del <u>mismo orden o tamaño</u>. La suma se realiza entrada con entrada, elementos que ocupan la misma posición.

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Calcule A + B, A – B, B – A

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2×2 $\quad$ 2×2

$$A + B = \begin{bmatrix} 3+2 & 5-3 \\ 1+1 & 0+2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 3-2 & 5-(-3) \\ 1-1 & 0-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

Ejemplo. Calcule P + Q

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}$$

3×4 $\qquad$ 4×2

$P + Q$

La suma $P+Q$
no está definida,
P y Q no son del mismo orden

Ejemplo. Calcule: $\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}}_{3 \times 2} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}}_{1 \times 1}$

Esta suma no
está definida,
las matrices no son
del mismo orden

Multiplicación de matrices por un escalar

La multiplicación de una matriz por un escalar se refiere al producto de un número real por una matriz. En la multiplicación escalar, cada entrada en la matriz se multiplica por el escalar dado.

$$\lambda \mathbf{A} = \lambda \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} & \cdots & \lambda A_{1m} \\ \lambda A_{21} & \lambda A_{22} & \cdots & \lambda A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda A_{n1} & \lambda A_{n2} & \cdots & \lambda A_{nm} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo. Calcule 3A – 2B

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$3A - 2B = \begin{bmatrix} 9 & 15 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 21 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

¿Cómo multiplicar matrices?

Dos matrices se pueden multiplicar si el número de columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda matriz. El producto se obtiene multiplicando las filas de la primera matriz por las columnas de la segunda matriz.

$$\begin{array}{ccccc} [\qquad] & \times & [\qquad] & = & [\qquad] \\ m \ x \ n & & p \ x \ q & & m \ x \ q \end{array}$$

m: número de filas de la primera matriz
n: número de columnas de la primera matriz
p: número de filas de la segunda matriz
q: número de columnas de la segunda matriz

Ejemplo: Calcule A*B y B*A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+0-4 & 4+0+0 \\ -6+21-2 & -8-3+0 \end{bmatrix}$$

$2 \times 3 \quad 3 \times 2$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 13 & -11 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

Ejemplo: Calcule A*B y B*A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{3\times 2}{B} \times \underset{2\times 3}{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-8 & 0+12 & 6+4 \\ 7+2 & 0-3 & 14-1 \\ -2+0 & 0+0 & -4+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & 12 & 10 \\ 9 & -3 & 13 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$AB \neq BA$$

La multiplicacion de matrices no es conmutativa

Ejemplo: Calcule $B \times A$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$B \times A$

$2 \times 2 \quad 3 \times 2$

La multiplicación BA no está definida.

El número de columnas de B no es igual al número de filas de A

Ejercicio 1. Calcule 4A – ½ B

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2: Calcule A*B y B*A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$